XXX TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. En un tablero de ajedrez gigante de 100×100 se han colocado 100 damas de modo que ninguna de ellas amenaza a otra. Demostrar que si se divide el tablero en cuatro subtableros de 50×50 mediante dos líneas paralelas a los lados y que pasan por el centro del tablero, entonces cada uno de los cuatro subtableros de 50×50 contiene por lo menos una de las damas.
ACLARACIÓN: Una dama amenaza a otra si están en la misma línea horizontal, vertical o diagonal ($\leftrightarrow$, $\updownarrow$, □ , □).

4 PUNTOS

2. Se tienen cuatro piedras que pesan cada una un número entero de gramos. Se dispone de una balanza de dos platos que indica la diferencia entre los pesos de los objetos colocados en el plato izquierdo y el derecho. Determinar si es posible conocer con certeza los pesos de cada una de las cuatro piedras, utilizando 4 veces la balanza si se sabe que la balanza puede cometer a lo sumo un error de 1 gramo en una sola de las pesadas.

6 PUNTOS

3. Sergio dibujó un triángulo ABC y la mediana AD, y a continuación le informó a Elías la longitud de la mediana AD y la longitud del lado AC. Con esta información Elías demostró la siguiente afirmación: “El ángulo CAB es obtuso y el ángulo DAB es agudo”. Determinar la razón $\frac{AD}{AC}$, y para cualquier triángulo con esa razón, demostrar la afirmación de Elías.

6 PUNTOS

4. El Barón de Münchhausen afirma que tiene un mapa del país de Oz con las siguientes características: Hay 5 ciudades, y cada dos de ellas están conectadas por un camino que no pasa por otra ciudad. Cada camino se cruza con a lo sumo uno de los otros caminos, y si lo hace, es en una sola oportunidad. En el mapa, los caminos son amarillos o rojos, y si se recorre el borde de una ciudad, cualquiera que esta sea, entonces los caminos aparecen con colores alternados. Determinar si la afirmación del Barón puede ser verdadera.

6 PUNTOS

CONTINÚA AL DORSO

5. Dados n números positivos a_1, a_2, …, a_n tales que $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq \frac{1}{2}$, demostrar que $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) < 2$.

8 PUNTOS

6. Sea *ABC* un triángulo escaleno. Se construyen dos triángulos isósceles *AB'C* y *CA'B*, de bases *AC* y *CB* respectivamente, ambos hacia afuera del triángulo inicial *ABC* y tales que $B'AC = B'CA = \varphi$ y $A'CB = A'BC = \varphi$. La perpendicular a *A'B'* trazada desde *C* corta a la mediatriz del segmento *AB* en C_1. Determinar la medida del ángulo AC_1B.

9 PUNTOS

7. Se tiene una sucesión infinita a_1, a_2, a_3, … de números tales que a_1 es igual a 1, y cada a_n, con $n > 1$, se obtiene de a_{n-1} de la siguiente manera: si el mayor divisor impar de n tiene resto 1 módulo 4, entonces $a_n = a_{n-1} + 1$, y si tiene resto 3 módulo 4, entonces $a_n = a_{n-1} - 1$.
Demostrar que en esta sucesión
a) el número 1 figura infinitas veces

5 PUNTOS

b) cada entero positivo figura infinitas veces.

5 PUNTOS

ACLARACIÓN: Los primeros términos de la sucesión son 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, … .

XXX TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Un tablero cuadrado se divide, mediante rectas paralelas a sus lados (7 rectas en cada dirección) en 64 rectángulos que se colorean como en el tablero de ajedrez. Las distancias entre rectas consecutivas pueden ser distintas, de modo que los rectángulos de la subdivisión pueden ser de tamaños diferentes. Sin embargo, la razón entre el área de cualquier rectángulo blanco y el área de cualquier rectángulo negro es menor o igual que 2. Determinar el máximo valor posible de la razón entre el área total de todos los rectángulos blancos y el área total de todos los rectángulos negros.

4 PUNTOS

2. El espacio se divide en cubos iguales que no se solapan. Decidir si es necesariamente verdadero que para cada uno de estos cubos exista otro cubo que tenga una cara común con él.

6 PUNTOS

3. En la mesa hay $N > 2$ pilas y cada una consiste de una sola nuez. Dos jugadores mueven por turnos. En cada movida, el jugador que tiene ese turno elige dos pilas tales que los números de nueces que contienen esas dos pilas sean coprimos, y une las dos pilas. Gana el jugador que realiza la última jugada. Para cada N determinar cual es el jugador que puede ganar no importa lo bien que juegue su oponente.
ACLARACIÓN: Dos números enteros son *coprimos* si su máximo común divisor es 1.

6 PUNTOS

4. Se tiene un trapecio NO isósceles $ABCD$. La circunferencia circunscrita del triángulo BCD corta a la recta AC en el punto A_1, distinto de C. Del mismo modo se definen los puntos B_1, C_1, D_1. Demostrar que el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$, también es un trapecio.
ACLARACIÓN: La *circunferencia circunscrita* de un triángulo es la que pasa por los tres vértices del triángulo. Su centro es la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo.

6 PUNTOS

CONTINÚA AL DORSO

5. Se tiene una sucesión infinita a_1, a_2, a_3, … de números tales que a_1 es igual a 1, y cada a_n, con $n > 1$, se obtiene de a_{n-1} de la siguiente manera: si el mayor divisor impar de n tiene resto 1 módulo 4, entonces $a_n = a_{n-1} + 1$, y si tiene resto 3 módulo 4, entonces $a_n = a_{n-1} - 1$.
Demostrar que en esta sucesión cada entero positivo figura infinitas veces.

8 PUNTOS

6. Dado un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que existen infinitos pares de enteros (m, n) que satisfacen la igualdad $P(m) + P(n) = 0$, demostrar que el gráfico de $y = P(x)$ tiene un centro de simetría.

9 PUNTOS

7. Un test consta de 30 preguntas, cada una de las cuales tiene 2 posibles respuestas (verdadero o falso). En cada intento, Víctor responde todas las preguntas, y luego le informan el número de respuestas correctas que tuvo. Determinar si Víctor puede organizar sus respuestas de modo que al final conocerá la respuesta correcta para cada una de las 30 preguntas si

a) hace 29 intentos (o sea que tiene que ser capaz de responder todas las preguntas correctamente en el intento 30;

5 PUNTOS

b) hace 24 intentos (o sea que tiene que ser capaz de responder todas las preguntas correctamente en el intento 25).

5 PUNTOS

ACLARACIÓN: Inicialmente Víctor no sabe ninguna respuesta; el test es exactamente el mismo en todos los intentos.